

Moments asymptotiques du volume nodal de champs gaussiens

Thomas Letendre
en collaboration avec M. Ancona, L. Gass et M. Stecconi

Journée Modélisation Aléatoire et Statistique
Lyon – 25 août 2026

Champs gaussiens gentils

Soient $d \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un champ gaussien gentil, c'est-à-dire :

gaussien centré : $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est gaussien centré ;

lisse : presque sûrement $\mathcal{C}^\infty$;

stationnaire : pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$, $f(\tau + \cdot) \stackrel{\text{loi}}{=} f$;

non-dégénéré : pas presque sûrement constant ;

normalisé : $\mathbb{E}[f(0)^2] = 1$.

Fonction de corrélation et mesure spectrale

Loi de f caractérisée par sa **fonction de corrélation** $\kappa : x \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(x)]$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E} \begin{bmatrix} f(x) & f(y) \end{bmatrix} = \kappa(y - x),$$

Fonction de corrélation et mesure spectrale

Loi de f caractérisée par sa **fonction de corrélation** $\kappa : x \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(x)]$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \mathbb{E}[\partial^\alpha f(x) \partial^\beta f(y)] = (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} \kappa(y-x),$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Fonction de corrélation et mesure spectrale

Loi de f caractérisée par sa **fonction de corrélation** $\kappa : x \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(x)]$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \mathbb{E}[\partial^\alpha f(x) \partial^\beta f(y)] = (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} \kappa(y-x),$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Théorème (Bochner, 1933)

κ est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité λ , appelée **mesure spectrale** de f . Ici, $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^p d\lambda(x) < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Si λ est une mesure de probabilité ayant des moments finis à tout ordre, alors il existe un unique champ gaussien gentil de mesure spectrale λ .

Exemples de champs gentils

Champ de Bargmann–Fock

$$f_{\text{BF}} : x \mapsto e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \frac{x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}}{\sqrt{\alpha_1! \dots \alpha_d!}}, \quad \text{où les } a_{\alpha} \text{ sont i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1).$$

Caractérisé par $\kappa_{\text{BF}} : x \mapsto e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ ou $\lambda_{\text{BF}} = \mathcal{N}(0, \text{Id})$.

Cas “générique” : le support de λ_{BF} est d'intérieur non-vide.

Exemples de champs gentils

Champ de Bargmann–Fock

$$f_{\text{BF}} : x \mapsto e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \frac{x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}}{\sqrt{\alpha_1! \dots \alpha_d!}}, \quad \text{où les } a_{\alpha} \text{ sont i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1).$$

Caractérisé par $\kappa_{\text{BF}} : x \mapsto e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ ou $\lambda_{\text{BF}} = \mathcal{N}(0, \text{Id})$.

Cas “générique” : le support de λ_{BF} est d'intérieur non-vide.

Champ de Berry

Défini par sa mesure spectrale $\lambda_{\text{Ber}} = \mathcal{U}(\mathbb{S}^{d-1})$.

On a $\Delta f_{\text{Ber}} + f_{\text{Ber}} = 0$ presque sûrement.

Cas “pathologique” : λ_{Ber} est supportée sur une hypersurface analytique.

Théorème (Lerario–Steconni, 2019)

$f^{-1}(0)$ est p.s. une hypersurface lisse. En particulier, elle porte une mesure de volume intrinsèque (mesure de Hausdorff $(d - 1)$ -dimensionnelle).

On note $\omega_d = \text{Vol}_d(B(0, 1))$ et, pour tout $R > 0$,

$$V_R = \text{Vol}_{d-1}(f^{-1}(0) \cap B(0, R)).$$

Théorème (Azaïs–Wschebor, 2009)

Il existe $\gamma_1(f) > 0$ tel que : $\forall R > 0, \quad \mathbb{E}[V_R] = R^d \gamma_1(f) \omega_d.$

Non-dégénérescence d'ordre $q \in \mathbb{N}$

ND(q)

Pour tout $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m_1 + \dots + m_n = q + 1$ et pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ distincts, $(\partial^\alpha f(x_i))_{1 \leq i \leq n, |\alpha| < m_i}$ est non-dégénéré.

Non-dégénérescence d'ordre $q \in \mathbb{N}$

ND(q)

Pour tout $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m_1 + \dots + m_n = q + 1$ et pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ distincts, $(\partial^\alpha f(x_i))_{1 \leq i \leq n, |\alpha| < m_i}$ est non-dégénéré.

ND(0) : $f(0)$ est non-dégénéré.

ND(1) : $(f(0), \nabla f(0))$ est non-dégénéré et $(f(0), f(x))$ aussi si $x \neq 0$.

ND(q) : si $x_0, \dots, x_q$ sont distincts $(f(x_0), \dots, f(x_q))$ est non-dégénéré, $(\partial^\alpha f(0))_{|\alpha| \leq q}$ est non-dégénéré, et tous les cas intermédiaires.

Non-dégénérescence d'ordre $q \in \mathbb{N}$

ND(q)

Pour tout $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m_1 + \dots + m_n = q + 1$ et pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ distincts, $(\partial^\alpha f(x_i))_{1 \leq i \leq n, |\alpha| < m_i}$ est non-dégénéré.

ND(0) : $f(0)$ est non-dégénéré.

ND(1) : $(f(0), \nabla f(0))$ est non-dégénéré et $(f(0), f(x))$ aussi si $x \neq 0$.

ND(q) : si $x_0, \dots, x_q$ sont distincts $(f(x_0), \dots, f(x_q))$ est non-dégénéré, $(\partial^\alpha f(0))_{|\alpha| \leq q}$ est non-dégénéré, et tous les cas intermédiaires.

Exemples

- f_{BF} est **ND(∞)**. Plus généralement, f t.q. $\text{supp}^\circ(\lambda) \neq \emptyset$ est **ND(∞)**.
- f_{Ber} n'est pas **ND(2)** : $(\partial^\alpha f_{\text{Ber}}(0))_{|\alpha| \leq 2}$ dégénéré car $\Delta f_{\text{Ber}} + f_{\text{Ber}} = 0$.

Décorrélation asymptotique à l'ordre $q \in \mathbb{N}$

DC(q)

Il existe $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$ et $\eta > 0$ tels que :

- $g(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0$;
- $g_\eta : x \mapsto \sup_{\|y\| \leq \eta} g(x+y)$ est L^2 sur $\mathbb{R}^d$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq 2q$, on a $|\partial^\alpha \kappa(x)| \leq g(x)$.

Exemples

- f_{BF} satisfait **DC**(∞).
- Si λ a une densité dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors f satisfait **DC**(∞) et **ND**(∞).

Asymptotiques des moments

Théorème (Ancona–Gass–L.–Steconni, 2025)

Soit $p \geq 2$, si f satisfait **DC**($2p - 1$) et **ND**($2p - 1$) alors il existe $\gamma_2(f) \geq 0$, dépendant uniquement de f , tel que :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{V_R - R^d \gamma_1(f) \omega_d}{R^{\frac{d}{2}}} \right)^p \right] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} (\gamma_2(f) \omega_d)^{\frac{p}{2}} \mathbb{E} [\mathcal{N}(0, 1)^p].$$

- Si f est isotrope alors $\gamma_2(f) > 0$, par exemple $\gamma_2(f_{\text{BF}}) > 0$.
- Conditions générales pour que $\gamma_2(f) > 0$ établies par Gass.

Théorèmes limites

Corollaire (Loi des Grands Nombres)

Si f satisfait $DC(3)$ et $ND(3)$ alors $\frac{V_R}{R^d} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{p.s.} \gamma_1(f)\omega_d$.

Théorèmes limites

Corollaire (Loi des Grands Nombres)

Si f satisfait **DC**(3) et **ND**(3) alors $\frac{V_R}{R^d} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{p.s.} \gamma_1(f)\omega_d$.

On retrouve un résultat de Kratz–Vadlamani (2018).

Corollaire (Théorème Central Limite)

Si f satisfait **DC**(∞) et **ND**(∞) alors

$$\frac{V_R - R^d \gamma_1(f)\omega_d}{R^{\frac{d}{2}}} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{loi} \mathcal{N}(0, \gamma_2(f)\omega_d).$$

Statistiques linéaires et résultats fonctionnels

Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit $\langle \nu_R, \phi \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \phi\left(\frac{x}{R}\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$.

Exemple : $\langle \nu_R, \mathbf{1}_{B(0,1)} \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \mathbf{1}_{B(0,R)}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = V_R$.

Statistiques linéaires et résultats fonctionnels

Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit $\langle \nu_R, \phi \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \phi\left(\frac{x}{R}\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$.

Exemple : $\langle \nu_R, \mathbf{1}_{B(0,1)} \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \mathbf{1}_{B(0,R)}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = V_R$.

Moments : $\mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle] = R^d \gamma_1(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi$ et, sous **DC**($2p-1$) et **ND**($2p-1$),

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\langle \nu_R, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle]}{R^{\frac{d}{2}}}\right)^p\right] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \left(\gamma_2(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^p].$$

Statistiques linéaires et résultats fonctionnels

Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit $\langle \nu_R, \phi \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \phi\left(\frac{x}{R}\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$.

Exemple : $\langle \nu_R, \mathbf{1}_{B(0,1)} \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \mathbf{1}_{B(0,R)}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = V_R$.

Moments : $\mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle] = R^d \gamma_1(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi$ et, sous **DC**($2p-1$) et **ND**($2p-1$),

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\langle \nu_R, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle]}{R^{\frac{d}{2}}} \right)^p \right] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \left(\gamma_2(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi^2 \right)^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^p].$$

LGN : Sous **DC**(3) et **ND**(3), $\frac{\nu_{R_n}}{R_n^d} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s., faible-}^*} \gamma_1(f) \text{ Leb}$, si $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{R_n^d} < +\infty$.

Statistiques linéaires et résultats fonctionnels

Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit $\langle \nu_R, \phi \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \phi\left(\frac{x}{R}\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$.

Exemple : $\langle \nu_R, \mathbf{1}_{B(0,1)} \rangle = \int_{f^{-1}(0)} \mathbf{1}_{B(0,R)}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = V_R$.

Moments : $\mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle] = R^d \gamma_1(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi$ et, sous **DC**($2p-1$) et **ND**($2p-1$),

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\langle \nu_R, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle]}{R^{\frac{d}{2}}}\right)^p\right] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \left(\gamma_2(f) \int_{\mathbb{R}^d} \phi^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^p].$$

LGN : Sous **DC**(3) et **ND**(3), $\frac{\nu_{R_n}}{R_n^d} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s., faible-}^*} \gamma_1(f) \text{ Leb}$, si $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{R_n^d} < +\infty$.

TCL : Sous **DC**(∞) et **ND**(∞), on a $\frac{\nu_R - R^d \gamma_1(f) \text{ Leb}}{R^{\frac{d}{2}}} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{\text{loi, } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \sqrt{\gamma_2(f)} W$,
où W est le bruit blanc gaussien standard.

Autres généralisations

- Volume $(d - k)$ -dimensionnel des zéros d'un champ gaussien gentil $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$, où $1 \leq k \leq d$.
- Champs gradients : $f = \nabla h$, où h est gaussien gentil.
- Zéros d'une famille de champs gaussiens $(f_R)_{R>0}$ ayant le champ f pour limite d'échelle lorsque $R \rightarrow +\infty$.

Merci de votre attention

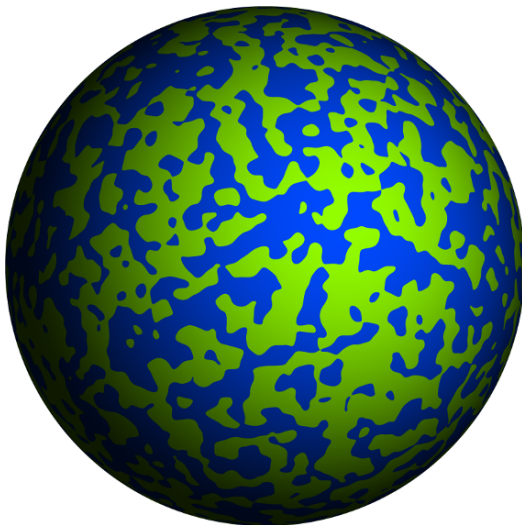


Image par Vincent Beffara.